E.S.E.O. -E.S.T.I.T.-H.E.I.-I.C.A.M.-I.C.P.I.-I.S.E.N.-I.S.E.P.
Concours d'entrée en première année du cycle d'ingénieurs 1986

SERIE P

PREMIERE COMPOSITION DE MATHEMATIQUES Durée 4 heures

PROBLEME

Ce probleme se propose de déterminer certaines solutions de l'équation aux dérivées partielles: $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t}$ (équation de propagation de la chaleur dans un"mur infini").

On note : $\Omega = \mathbb{R}\times\mathbb{R}^*$ et $\Omega^+ =]0,\infty[\times]0,\infty[$ .On désigne alors par $\mathcal{U}$ (respectivement : $\mathcal{U}^+$) l'ensemble des applications numériques $u : (x,t) \longmapsto u(x,t)$ de classe C^2 sur Ω (resp: sur Ω^+);on rappelle que $\mathcal{U}$ et $\mathcal{U}^+$ sont des $\mathbb{R}$-algèbres pour les lois usuelles;Si u appartient à $\mathcal{U}$ (ou à $\mathcal{U}^+$),on convient de noter u'_1 (resp : u''_1 ,u'_2) l'application dérivée partielle $(x,t) \longmapsto \frac{\partial u}{\partial x}(x,t)$ (respectivement : $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t)$, $\frac{\partial u}{\partial t}(x,t)$).

On pourra utiliser (sans le démontrer) le résultat suivant :pour tout (n,p,q,k) dans N^4 ,la composée d'une application de classe C^k d'un ouvert A de R^n dans un ouvert B de R^p avec une application de classe C^k de B dans R^q est une application de classe C^k sur A.

1°)On considére l'application $\varphi : \Omega \longrightarrow \Omega$, $(x,t) \longmapsto \left(\frac{x}{t}, -\frac{1}{t}\right)$ et ,à un élément u de $\mathcal{U}$ on associe l'application $v = u \circ \varphi$.

a)Montrer que : $v \in \mathcal{U}_+$ et exprimer v'_1 ,v''_1 et v'_2 en fonction de φ ,u,u'_1 ,u''_1 et u'_2 .

b)Vérifier que: $\forall\ (x,t)\in\Omega$

$$v''_1(x,t) - \frac{x}{t}v'_1(x,t) - v'_2(x,t) = \frac{1}{t^2}\left[u''_1 \circ \varphi(x,t) - u'_2 \circ \varphi(x,t)\right]$$

2°)On désigne par r l'élément de $\mathcal{U}^+$ défini par $\forall (x,t) \in \Omega^+$ $r(x,t) = \frac{1}{\sqrt{t}} \exp\left(-\frac{x^2}{4t}\right)$

a) A un élément u de $\mathcal{U}$, on associe l'application

$$\tilde{u} : \Omega^+ \longrightarrow \mathbb{R},\quad (x,t) \longmapsto r(x,t).\ u\circ\varphi(x,t)$$

prouver que : $\tilde{u} \in \mathcal{U}^+$ et calculer $\tilde{u}''_1 - \tilde{u}'_2$ en fonction de r, φ , u ,u'_1 ,u''_1 ,u'_2 .

b)On désigne par $\mathcal{S}$ (respectivement : $\mathcal{S}^+$) l'ensemble des éléments de $\mathcal{U}$ (resp. : $\mathcal{U}^+$) qui sont solutions sur Ω (resp.: Ω^+) de l'équation aux dérivées partielles $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t}$ (c'est à dire qui vérifient $u''_1 = u'_2$.).
Prouver que si : $u \in \mathcal{S}$,alors $\tilde{u} \in \mathcal{S}^+$.

Note d'édition:pour des raisons techniques ce texte n'est pas la reproduction de celui distribué aux candidats,mais une reconstitution.Il est donc donné sous toutes réserves.

3°)On désigne par $\mathcal{U}_0$ l'ensemble des éléments u de $\mathcal{U}$ pour lesquels existent deux applications numériques f et g, de classe C^2, respectivement sur $\mathbb{R}$ et sur $\mathbb{R}^*$ et qui vérifient: $\forall (x,t)\in\Omega \quad u(x,t)=f(x).g(t)$.

a) Soit u un élément non nul de $\mathcal{U}_0$; avec les notations ci-dessus, prouver que : $(u\in\mathcal{S}) \Leftrightarrow (\forall K\in\mathbb{R},\ f''=Kf \text{ et } g'=Kg)$.

b) déterminer les éléments de $\mathcal{U}_0\cap\mathcal{S}$.

c)Déduire de ce qui précède que, pour tout réel α, les applications de Ω^+ dans R suivantes appartiennent à $\mathcal{S}^+$:

$r : (x,t)\longmapsto \frac{1}{\sqrt{t}}\exp\left(-\frac{x^2}{4t}\right)$ $\qquad$ $\rho : (x,t)\longmapsto \frac{x}{t\sqrt{t}}\exp\left(-\frac{x^2}{4t}\right)$

$r_\alpha : (x,t)\longmapsto \frac{1}{\sqrt{t}}\exp\left(-\frac{(x-2\alpha)^2}{4t}\right)$

$\gamma_\alpha : (x,t)\longmapsto \frac{1}{\sqrt{t}}\exp\left(-\frac{(x^2-4\alpha^2)}{4t}\right)\cos\left(\frac{\alpha x}{t}\right)$ $\qquad$ $\sigma_\alpha : (x,t)\longmapsto \frac{1}{\sqrt{t}}\exp\left(-\frac{(x^2-4\alpha^2)}{4t}\right)\sin\left(\frac{\alpha x}{t}\right)$

4°) Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites convergentes de réels.

a)Prouver pour tout (x,t) dans Ω^+, la convergence de la série de terme général : $u_n(x,t)= e^{-n^2t}\left(a_n\cos(nx)+b_n\sin(nx)\right)$.

b)Pour tout $(x,t)\in\Omega^+$ on note $U(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x,t)$ et on admet que l'application U ainsi définie est de classe C^2 sur Ω^+ et que ses dérivées partielles successives s'obtiennent par dérivations partielles terme à termes.
Vérifier que : $U\in\mathcal{S}^+$.

5°) On rappelle que $\int_0^{\infty} e^{-s^2}ds=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$ .On désigne par E l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par : $\forall\ t\in\mathbb{R}$, $E(t)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_t^{\infty} e^{-s^2}ds$
(E : fonction d'erreur complémentaire).

a) Etudier les variations et donner une représentation graphique de E.

b)Montrer que l'application $\mu : (x,t)\longmapsto E\left(\frac{x}{2\sqrt{t}}\right)$ est de classe C^2 sur Ω^+ et calculer μ_1', μ_1'' et μ_2' en fonction de r et ρ (voir 3°c).

c)En déduire que, pour tout (x,t) dans Ω^+, $\int_0^t \rho(x,s)ds$ est une intégrale convergente et que l'application $\widehat{\rho} : \Omega^+\longrightarrow\mathbb{R}$, $(x,t)\longmapsto\int_0^t\rho(x,s)ds$ appartient à $\mathcal{S}^+$.

6°)On désigne par F l'application de $]0,\infty[$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$\forall\ t\in]0,\infty[$ $\qquad$ $F(t)=\int_t^{\infty}\frac{1}{s^2}e^{-s^2}ds$

a)Prouver que : $\forall t\in]0,\infty[$ $\qquad$ $F(t)=\frac{e^{-t^2}}{t}-\sqrt{\pi}\ E(t)$.

b)Montrer que l'application v : $(x,t)\longmapsto x\,F\left(\frac{x}{2\sqrt{t}}\right)$ est de classe C^2 sur Ω^+ et calculer v_1', v_1'' et v_2'.

c)Etant donné α dans $]-\infty,0[$, montrer que, poutr tout (x,t) dans Ω^+, $\int_0^t r_\alpha(x,s)ds$ est une intégrale convergente et que l'application $\widehat{r_\alpha} : \Omega^+\longrightarrow\mathbb{R}$, $(x,t)\longmapsto\int_0^t r_\alpha(x,s)ds$ appartient à $\mathcal{S}^+$.